

Ondas y Fluidos

Apendices

Torres-Papaqui Juan Pablo

papaqui@astro.ugto.mx

1. Algebra

Reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, donde a , b , c y d son cuatro números:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

Para multiplicar y dividir potencias, se aplican las siguientes reglas, donde n y m son números y x alguna variable:

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Una potencia fraccionaria corresponde a una raíz:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Cualquier cantidad x^n que es elevada a una potencia m , es:

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Otras importantes son:

$$(xy)^n = x^n y^n \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$x^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0$$

Algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación son:

$$\text{Cuadrado de un binomio:} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Diferencia de cuadrados:} \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

La forma general de una ecuación cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde x es la cantidad desconocida y a , b y c son factores numéricos conocidos como coeficientes de la ecuación; tiene dos soluciones dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si " $b^2 \leq 4ac$ ", las soluciones serán reales.

Logaritmos. Si la variable x se expresa como potencia de una cantidad a , de la forma

$$x = a^y$$

el número a se llama base. El logaritmo de x con respecto a la base a es igual al exponente al cual se debe elevar la base, que se escribe como:

$$y = \log_a x$$

En la práctica, las dos bases más usadas son la base 10, llamada logaritmo común, y la base $e = 2.718\dots$, llamada logaritmo natural. Para el logaritmo común y natural se utiliza respectivamente las notaciones:

$$y = \log x \iff x = 10^y$$

$$y = \ln x \iff x = e^y$$

Algunas propiedades de los logaritmos son las siguientes:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x/y) = \log x - \log y$$

$$\log(x^n) = n \log x$$

$$\log 1 = \ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

2. Geometría

La distancia d entre dos puntos cuyas coordenadas son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para calcular el ángulo en radianes, se sabe que la longitud del arco s (Fig. B.1) es proporcional al radio r , para el valor de θ medido en radianes.

$$s = r\theta \rightarrow \theta = \frac{s}{r}$$

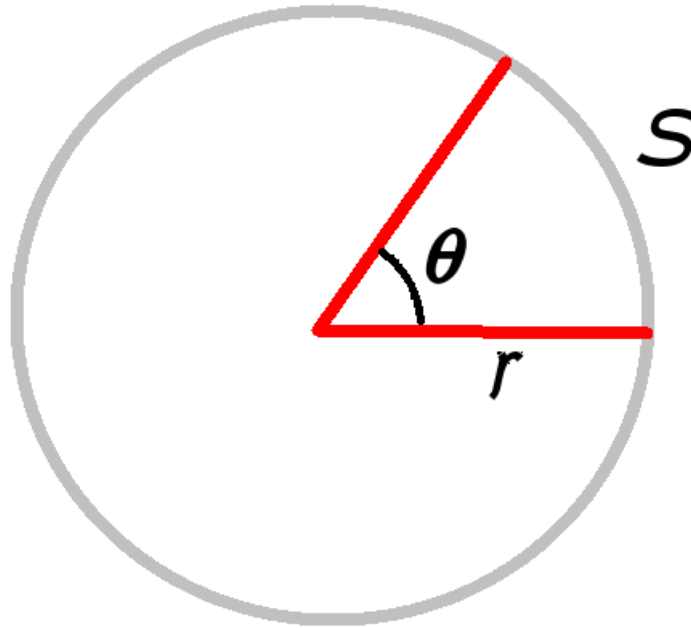


Figura B.1

La ecuación de una línea recta (Fig. B.2) está dada por $y = mx + b$, donde b es la intersección con y y m la pendiente de la recta.

La ecuación de un círculo de radio R centrado en el origen es: $x^2 + y^2 = R^2$

La ecuación de una elipse con el origen como su centro (Fig. B3) es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor.

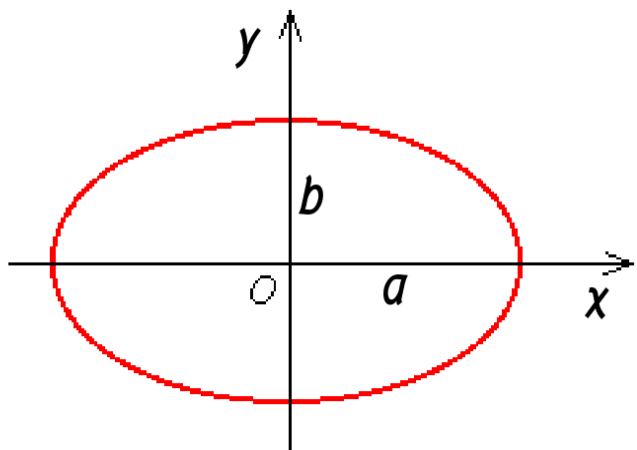
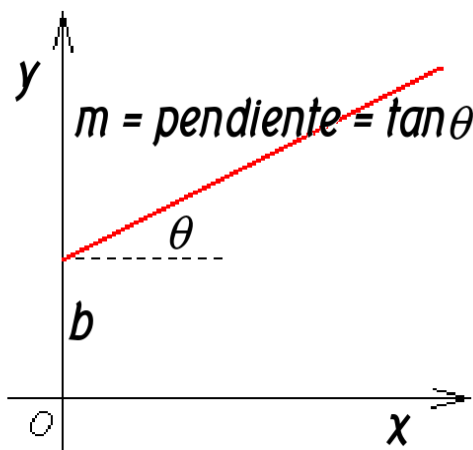


Figura B.2 y Figura B.3

La ecuación de la parábola cuyo vértice está en $y = b$ (Fig. B.4) es: $y = ax^2 + b$.

La ecuación de una hipérbola rectangular (Fig. B.5) es: $xy = cte$

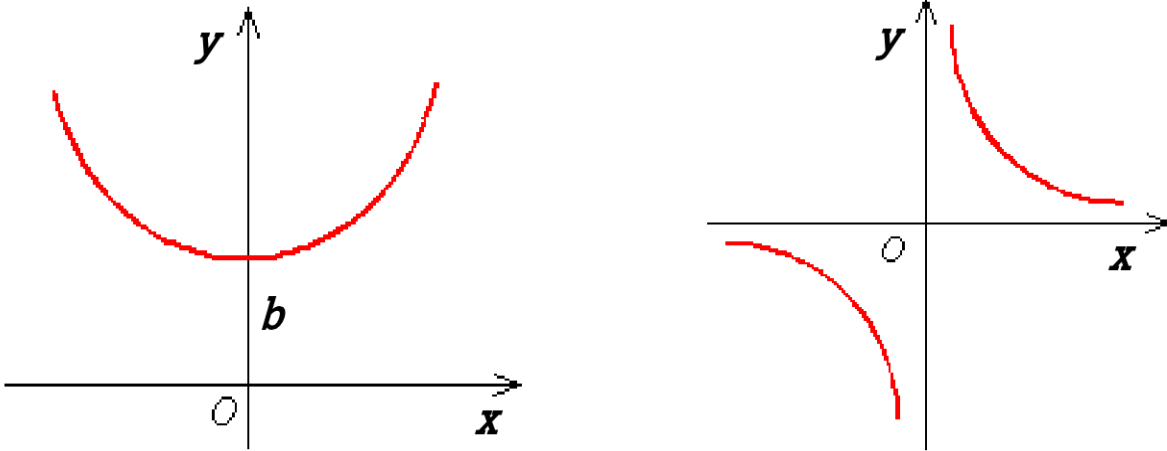


Figura B.4 y Figura B.5

Áreas y volúmenes.

Tabla 1: Unidades de medida de las magnitudes físicas fundamentales en mecánica.

Forma	Área	Volumen
Rectángulo lados a y b	$a \times b$	
Circunferencia de radio r	πr^2	
Triángulo base b , altura h	$\frac{1}{2}bh$	
Caja rectangular lados a , b , c	$2(ab + bc + ca)$	$a \times b \times c$
Cilindro largo h , radio r	$2(\pi r^2 + \pi r h)$	$\pi r^2 h$
Esfera radio r	$4\pi r^2$	$\frac{3}{4}\pi r^3$

3. Trigonometría

La parte de las matemáticas que se basa en las propiedades especiales de los triángulos rectángulos se llama trigonometría. Por definición, un triángulo recto es el que contiene un ángulo de 90° . Considérese el triángulo recto de la figura C.1, donde el lado a es opuesto al ángulo θ , el lado b es adjunto al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas para tales triángulos son las funciones seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan). En términos del ángulo θ , estas funciones se definen por:

$$\text{sen}(\theta) \equiv \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\theta) \equiv \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\theta) \equiv \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b}$$

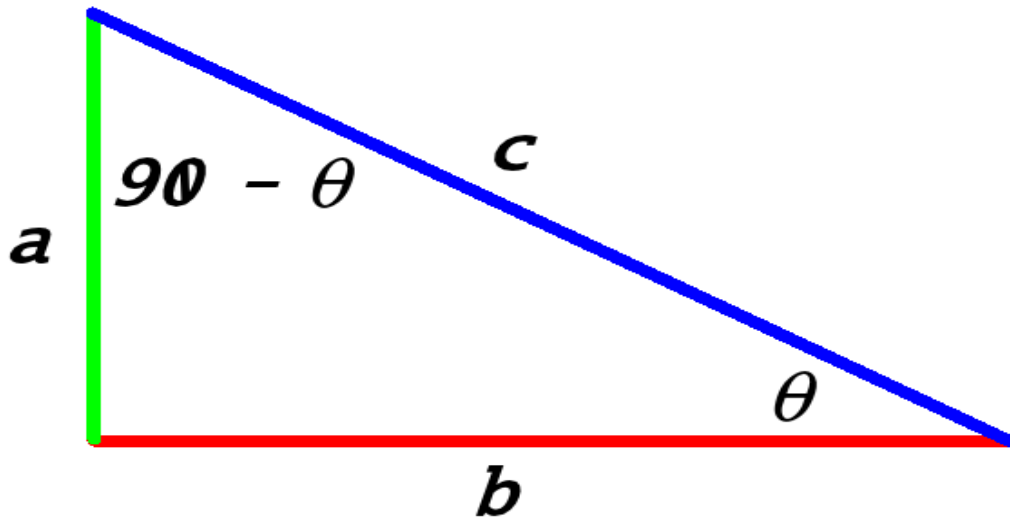


Figura C.1

El teorema de Pitágoras da la siguiente relación entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

De las definiciones anteriores y el teorema de Pitágoras, se sigue que:

$$\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1 \quad \tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$$

Las funciones cotangente, secante y cosecante están definidas directamente de un triángulo recto mostrado en la figura C.1 como:

$$\cot(\theta) \equiv \frac{1}{\tan(\theta)} \quad \sec(\theta) \equiv \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \csc(\theta) \equiv \frac{1}{\text{sen}(\theta)}$$

Algunas de las propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= \text{cos}(90^\circ - \theta), & \text{sen}(-\theta) &= -\text{sen}(\theta) \\ \text{cos}(\theta) &= \text{sen}(90^\circ - \theta), & \text{cos}(-\theta) &= \text{cos}(\theta) \\ \cot(\theta) &= \tan(90^\circ - \theta), & \tan(-\theta) &= -\tan(\theta) \end{aligned}$$

Las siguientes relaciones se aplican a cualquier triángulo, como el de la figura C.2:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

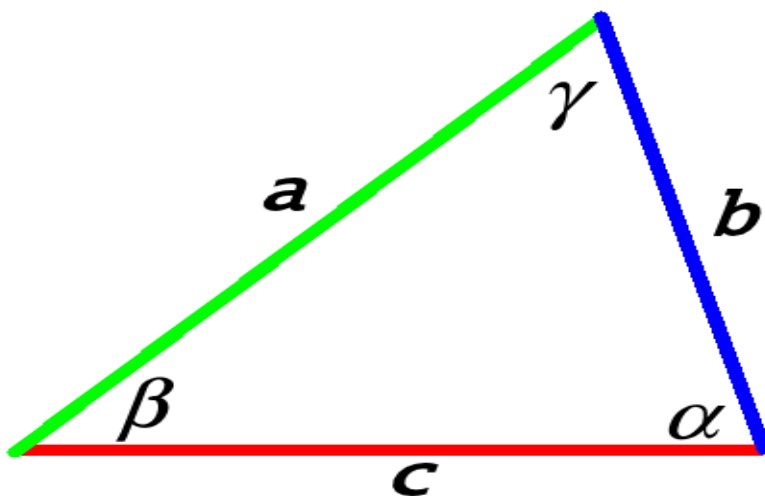


Figura C.2

Ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

Ley de los senos

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}$$

Ahora se listan algunas identidades trigonométricas útiles.

$$\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta), \quad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}, \quad \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}}$$

$$\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}[1 - \cos(\theta)], \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}[1 + \cos(\theta)]$$

$$\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta), \quad \csc^2(\theta) = 1 + \cot^2(\theta)$$

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen} A \cos B \pm \cos A \text{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen} A \text{sen} B$$

$$\text{sen} A \pm \text{sen} B = 2 \text{sen} \frac{1}{2}(A \pm B) \cos \frac{1}{2}(A \mp B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = 2 \text{sen} \frac{1}{2}(A + B) \text{sen} \frac{1}{2}(B - A)$$

4. Derivadas e Integrales

4.1. Lista de derivadas de algunas funciones

Nota: Las letras a y n son constantes.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a) &= 0, & \frac{d}{dx}(ax^n) &= n a x^{n-1}, \\ \frac{d}{dx}(uv) &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, & \frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} \right] &= \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx} \\ \frac{d}{dx} a^u &= a^u \ln a \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx}(e^{ax}) &= a e^{ax}, \\ \frac{d}{dx} \log_a u &= \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx}, & \frac{d}{dx} [\ln(ax)] &= \frac{a}{x}, & \frac{d}{dx} \ln u &= \frac{d}{dx} \log_e u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \\ \frac{d}{dx} [\operatorname{sen}(ax)] &= a \cos(ax), & \frac{d}{dx} [\operatorname{cos}(ax)] &= -a \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{d}{dx} [\operatorname{tan}(ax)] &= a \operatorname{sec}^2(ax), & \frac{d}{dx} [\operatorname{cot}(ax)] &= -a \operatorname{csc}^2(ax), \\ \frac{d}{dx} (\operatorname{sec} x) &= \operatorname{tan}(x) \operatorname{sec}(x), & \frac{d}{dx} [\operatorname{csc}(x)] &= -\operatorname{cot}(x) \operatorname{csc}(x), \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left[\frac{x}{a} \right] &= \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cos} \left[\frac{x}{a} \right] &= \frac{\mp 1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arctan} \left[\frac{x}{a} \right] &= \frac{a}{a^2 - x^2}, & \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} \left[\frac{x}{a} \right] &= \frac{-a}{a^2 - x^2}\end{aligned}$$

Regla de la Cadena

$$\frac{dF(u)}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \frac{du}{dx}$$

Derivadas parciales, sea la siguiente $f(x, y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\end{aligned}$$

4.2. Algunas integrales indefinidas

Nota: Las letras a, b, c y n son constantes.

Una constante arbitraria se debe sumar a cada una de estas integrales.

$$\begin{aligned}
 \int dx &= x, & \int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \\
 \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1, & \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \sqrt{x^2 \pm a^2} \\
 \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} &= \sqrt{x}, & \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsen \frac{x}{a} = -\arccos \frac{x}{a} \\
 \int -\frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{x}, & \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \\
 \int e^{-x} dx &= -e^{-x}, & \int \operatorname{sen} ax dx &= -\frac{1}{a} \cos ax \\
 \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax}, & \int \cos ax dx &= \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax \\
 \int x e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1), & \int \tan ax dx &= -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax) \\
 \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a}, & \int \cot ax dx &= \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax) \\
 \int \ln ax dx &= x \ln ax - x, & \int \sec ax dx &= \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) \\
 \int \frac{dx}{x} &= \ln x, & \int \operatorname{csc} ax dx &= \frac{1}{a} \ln(\operatorname{csc} ax - \cot ax) \\
 \int \frac{dx}{a + bx} &= \frac{1}{b} \ln(a + bx), & \int \operatorname{sen}^2 ax dx &= \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} \\
 \int \frac{dx}{a + be^{cx}} &= \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a + be^{cx}), & \int \cos^2 ax dx &= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} \\
 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad a^2 - x^2 > 0, & \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} &= -\frac{1}{a} \cot ax \\
 \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} &= \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2), & \int \frac{dx}{\cos^2 ax} &= \frac{1}{a} \tan ax \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}), & \int \tan^2 ax dx &= \frac{1}{a} \tan ax - x \\
 \int \frac{dx}{(a + bx)^2} &= -\frac{1}{b(a + bx)}, & \int \cot^2 ax dx &= -\frac{1}{a} \cot ax - x \\
 \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= -\sqrt{a^2 - x^2}, & \int \arcsen ax dx &= x \arcsen ax + \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a} \\
 \int a\sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}, & \int \arccos ax dx &= x \arccos ax + \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}
 \end{aligned}$$

5. Datos Comunes en el Sistema Solar y Terrestre

Tabla 2: Datos del sistema solar.

Cuerpo	Masa (kg)	Radio prom. (m)	Periodo (s)	Distancia al Sol (m)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^6	3.16×10^7	1.49×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^7	9.35×10^8	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^7	2.64×10^9	2.87×10^{12}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^7	5.22×10^9	4.50×10^{12}
Plutón	1.40×10^{22}	1.50×10^6	7.82×10^9	5.91×10^{12}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^6		
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8		

Tabla 3: Valores de los datos físicos comúnmente utilizados.

Aceleración debida a la gravedad	$\approx 9.80 \text{ m/s}^2$
Rapidez de la luz	$\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
Presión atmosférica estándar	$\approx 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$
Densidad del aire (20°C y 1 atm)	$\approx 1.25 \text{ kg/m}^3$
Densidad del agua (20°C y 1atm)	$1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Rapidez angular de la Tierra	$7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
Inclinación eje terrestre	23.5°
Distancia promedio Tierra-Luna	$3.84 \times 10^8 \text{ m}$
Distancia promedio Tierra-Sol	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
Radio promedio de la Tierra	$6.37 \times 10^6 \text{ m}$
Masa de la Tierra	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masa de la Luna	$7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$
Masa del Sol	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

6. Factores de Conversión de Unidades de Medida

Tabla 4: Longitud.

	m	cm	km	pulg	pie	mi
1 metro	1	10^2	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	10^3	10^{-5}	1	3.937×10^4	3.281×10^3	0.6214
1 pulgada	2.54×10^{-2}	2.54	2.54×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	0.3048	30.48	3.05×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1609	1.609×10^5	1.609	6.336×10^4	5280	1

Tabla 5: Masa.

	Kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^3	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug (lb/g)	14.59	1.46×10^4	1	8.789×10^{27}
1 unidad de masa atómica	1.66×10^{-27}	1.66×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Tabla 6: Tiempo.

	s	Min	h	Día	año
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	3600	60	1	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	8.64×10^4	1440	24	1	2.738×10^{-3}
1 año	3.16×10^7	5.259×10^5	8.766×10^3	365.2	1

Tabla 7: Fuerza.

	N	dina	lb
1 Newton	1	10^5	0.2248
1 dina	10^{-5}	1	2.248×10^{-6}
1 libra	4.448	4.448×10^5	1

Tabla 8: Trabajo, energía y calor.

	J	erg	pie Ib	eV	cal	Btu	kWh
1 joule	1	10^{-7}	0.7376	6.24×10^{18}	0.2389	9.48×10^{-4}	2.78×10^{-7}
1 erg	10^{-7}	1	7.38×10^{-8}	6.24×10^{11}	2.39×10^{-8}	9.48×10^{-11}	2.78×10^{-14}
1 pie·Ib	1.356	1.36×10^7	1	8.46×10^{18}	0.3239	1.28×10^{-3}	3.77×10^{-7}
1 eV	1.6×10^{-19}	1.60×10^{-12}	1.18×10^{-19}	1	3.83×10^{-20}	1.52×10^{-22}	4.45×10^{-26}
1 cal	4.186	4.19×10^7	3.087	2.61×10^{19}	1	3.97×10^{-3}	1.16×10^{-6}
1 Btu	1.06×10^3	1.05×10^{10}	7.78×10^2	6.58×10^{21}	2.52×10^2	1	2.93×10^{-4}
1 kWh	3.6×10^6	3.6×10^{13}	2.65×10^6	2.25×10^{25}	8.60×10^5	3413×10^2	1

Tabla 9: Presión.

	Pa	dina/cm ²	Atm	cm Hg	Ib/pulg ²	Ib/pie ²
1 pascal	1	10	9.87×10^{-6}	7.50×10^{-4}	1.45×10^{-4}	2.09×10^{-2}
1 dina/centímetro ²	10^{-1}	1	9.87×10^{-7}	7.50×10^{-5}	1.45×10^{-5}	2.09×10^{-3}
1 atmósfera	1.01×10^5	1.01×10^6	1	76	14.7	2.12×10^3
1 cm de mercurio*	1.33×10^3	1.33×10^4	1.32×10^{-2}	1	0.1943	27.85
1 libra/pulgada ²	6.89×10^3	6.89×10^4	6.80×10^{-2}	5.171	1	144
1 libra/pie ²	47.88	4.79×10^2	4.72×10^{-4}	3.59×10^{-2}	6.94×10^{-3}	1

* A 0°C y en un lugar donde la aceleración debida a la gravedad sea su valor estándar, 9.81 m/s .

7. Letras Griegas

Tabla 10: Alfabeto Griego.

Alfa	α	A	Nu	ν	N
Beta	β	B	Omicron	o	O
Gamma	γ	Γ	Pi	π	Π
Delta	δ	Δ	Theta	θ	Θ
Epsilon	ϵ	E	Rho	ρ	P
Phi (Fi)	ϕ	Φ	Sigma	σ	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Iota	ι	I	Upsilon	v	Υ
Chi (Ji)	χ	X	Omega	ω	Ω
Kappa	κ	K	Xi	ξ	Ξ
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mu	μ	M	Zeta	ζ	Z