TEMA I.2

Movimiento Ondulatorio Simple

Dr. Juan Pablo Torres-Papaqui

Departamento de Astronomía
Universidad de Guanajuato
DA-UG (México)

papaqui@astro.ugto.mx

División de Ciencias Naturales y Exactas,
Campus Guanajuato, Sede Noria Alta

Velocidad de las ondas

Una propiedad general del movimiento ondulatorio simple o de las ondas, es que su velocidad depende de las propiedades del medio y que es independiente del movimiento de la fuente de las ondas. Por ejemplo, la velocidad del sonido de la bocina de un coche depende sólo de las propiedades del aire y no del movimiento del coche.

En el caso de los pulsos de onda en una cuerda, es fácil demostrar que cuando mayor es la tensión, más rápidamente se propagan las ondas. Además, las ondas se propagan más rápidamente en una cuerda ligera que en una cuerda pesada bajo la misma tensión. Veremos posteriormente que si F_T (usamos F_T para designar la tensión porque reservamos T para el periodo) es la tensión y μ la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud), la velocidad de la onda es

$$\nu = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \tag{I.2.1}$$

Velocidad de la onda en una cuerda

Ejemplo: El gusano que corre para salvar la vida.

Un gusano está a 2.5 cm del extremo de la cuerda de un tendedero cuando alguien lo ve y da un golpe a la cuerda de modo que por ésta se propaga un pulso de 3 cm de altura que se dirige hacia el animal. Si el gusano se mueve a 2.54 cm/s, ¿llegará al extremo de la cuerda antes que le alcance el movimiento generado? La cuerda tiene 25 m de largo y una masa de 0.25 kg y se mantiene gracias a un peso de 10 kg que cuelga de ella. Esta persona se encuentra a una distancia de 5 m del extremo de la cuerda opuesto a la posición del gusano.

Planteamiento del problema: Hay que saber a qué velocidad se mueve la onda. Para ello usamos la fórmula $\nu = \sqrt{F_T/\mu}$.

Solución del problema:

1. La velocidad está relacionada con al tensión F_T y la densidad de masa lineal μ
2. Calcular la densidad de masa lineal y la tensión a partir de la información recibida: $\mu = \frac{m_C}{L}$ y $F_T = mg$
3. Aplicar estos valores a la expresión de ν para calcular la velocidad: $\nu = \sqrt{\frac{m\,g\,L}{m_C}} = \sqrt{\frac{(10\,kg)(9.81\,m/s^2)(25\,m)}{0.25\,kg}}$; $\nu = 99.0\ m/s$
4. Usar esta velocidad para determinar el tiempo que tarda en recorrer los 20 m que le separan del otro extremo de la cuerda. $\Delta t = \frac{\Delta x}{\nu} = \frac{20\,m}{99.0\,m/s} = 0.202\ s$
5. Determinar el tiempo que interviene el gusano en moverse los 2.5 cm que le separan del extremo de la cuerda y, por lo tanto, de la salvación. $\Delta t = \frac{\Delta x'}{\nu'} = \frac{2.5\,cm}{2.54\,cm/s} = 0.984\ s$

Velocidad de la onda en una cuerda

Ejercicio: Si se sustituye la masa de 10 kg por otra de 20 kg ¿cuál será la velocidad de la onda en la cuerda?

Ejercicio: Demostrar que las unidades de $\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$ son m/s cuando F_T es expresa en Newtons y μ en kg/m.

Velocidad de la onda en una cuerda

Ejercicio: Una cuerda cuelga verticalmente del techo. Cuando las ondas se mueven de abajo hacia arriba por la cuerda, ¿lo hacen más rápidamente, más lentamente o a la misma velocidad que las ondas que se mueven de arriba hacia abajo? Razonar la respuesta.

Ejercicio: El chasquido del látigo lo produce la velocidad de la punta que rompe la barrera del sonido. Explicar cómo la forma del látigo hace posible que la punta del mismo se mueva mucho más rápido que la mano que lo mueve.

Velocidad de la onda en un fluido

En el caso de las ondas sonoras en un fluido como el aire o el agua, la velocidad ν viene expresada por

$$\nu = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{I.2.2}$$

en donde ρ es la densidad del medio (en equilibrio) y B el módulo de compresibilidad.

El módulo de compresibilidad es el cociente, con signo negativo, entre el cambio en la presión y el correspondiente cambio de volumen por unidad de volumen: $B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$.

Comprobar las unidades de $\nu = \sqrt{B/\rho}$.

Velocidad de la onda en un fluido

Comparando las ecuaciones I.2.1 y I.2.2 puede verse que, en general, la velocidad de las ondas dependen de una propiedad elástica del medio (la tensión en el caso de la onda de las cuerdas y el módulo de compresibilidad de las ondas sonoras) y de una propiedad inercial del mismo (la densidad de masa lineal o de la densidad de masa volúmica).

Para las ondas sonoras en un gas, tal como el aire, el módulo de compresibilidad (este describe cambios en el volumen que ocurren a temperaturas constante) es proporcional a la presión, la cual a su vez es proporcional a la densidad ρ y a la temperatura absoluta T del gas. La relación B/ρ es por tanto, independiente de la densidad y simplemente proporcional a la temperatura absoluta T. Más adelante demostraremos que en este caso, la ecuación I.2.2 es equivalente a

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \text{(I.2.3)}$$

Velocidad del sonido en un gas

En la ecuación I.2.3, T es la temperatura absoluta medida en kelvins (K) que está relacionada con la temperatura Celsius, t_C por

$$T = t_C + 273 \tag{I.2.4}$$

La constante γ depende del tipo de gas. Para moléculas diatómicas como el O_2 y N_2, γ tiene el valor 1.4 y como el O_2 y N_2 constituyen el 98 % de la atmósfera, éste es el valor que corresponde también al aire (para moléculas monoatómicas como el He, el γ posee el valor 1.67). La constante R es la constante universal de los gases

$$R = 8.314 \qquad J/(mol \cdot K) \tag{I.2.5}$$

y M la masa molar del gas (es decir, la masa de 1 mol del gas), que para el aire es

$$M = 29 \times 10^{-3} \qquad kg/mol$$

Velocidad del sonido en un gas

Ejemplo: Velocidad del sonido en el aire.

Calcular la velocidad del sonido en el aire (a) a 0 ^oC y (b) a 20 ^oC.

Planeación del Problema:

1. Escribir la ecuación I.2.3
2. Introducir los valores en la ecuación y despejar la velocidad. $\nu_a = 331$ m/s
3. Calcular a 293 K o 20 ^oC. $\nu_b = 343$ m/s.

Observación: En este ejemplo vemos que la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente 340 m/s a temperaturas ordinarias.

Velocidad del sonido en un gas

Ejercicio: Comprobar las unidades de $\nu = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$.

Ejercicio: Para el Helio ¿cuál es la velocidad de las ondas sonoras a 20 ^oC?

Ejercicio: Verdadero o Falso
La velocidad del sonido a 20^{o}C es el doble que a 5^{o}C.

La Ecuación de Onda

Podemos aplicar las leyes de Newton a un segmento de cuerda para deducir una ecuación diferencial llamada ecuación de onda que relaciona las derivadas espaciales de la función $y(x, t)$ con sus derivadas temporales. La Figura I.2.1 muestra un segmento de una cuerda. Consideremos sólo ángulos pequeños θ_1 y θ_2. En este caso, la longitud del segmento es aproximadamente Δx y su masa $m = \mu \Delta x$ ($\mu = m/\Delta x$), en donde μ es la masa de la cuerda por unidad de longitud. Primero demostraremos que, para desplazamientos verticales pequeños, la fuerza resultante horizontal sobre un segmento es cero y que la tensión es uniforme y constante. Es decir,

$$\sum F_x = F_{T2} \cos(\theta_2) - F_{T1} \cos(\theta_1) = 0$$

en donde θ_1 y θ_2 son los ángulos indicados y F_T es la tensión en la cuerda. Como se supone que los ángulos son pequeños, podemos aproximar $\cos(\theta)$ por 1.

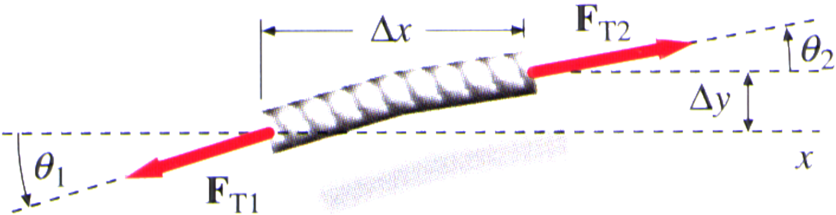

Figura I.2.1: Segmento de una cuerda tensa utilizado para la deducción de la ecuación de onda.

La Ecuación de Onda

Por lo tanto, la fuerza neta horizontal que actúa sobre el segmento de cuerda puede expresarse en la forma

$$F_x = F_{T2} - F_{T1} = 0$$

Con lo cual,

$$F_{T2} = F_{T1} = F_T$$

El segmento de cuerda se mueve verticalmente y la fuerza neta en esta dirección es

$$F_y = F_T \operatorname{sen}(\theta_2) - F_T \operatorname{sen}(\theta_1)$$

Se supone que los ángulos son pequeños, por lo tanto se puede aproximar $\operatorname{sen}(\theta)$ por $\tan(\theta)$ para cada uno de ellos. En estas condiciones la fuerza vertical neta sobre el segmento de cuerda se escribe como

$$F_y = F_T(\operatorname{sen}(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)) \approx F_T(\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1))$$

La Ecuación de Onda

La tangente del ángulo formado por la cuerda con la horizontal es la pendiente de la curva formada por la cuerda. La pendiente S es la primera derivada de $y(x, t)$ respecto a x para t constante. Una derivada de una función de dos variables respecto a una de ellas, manteniendo la otra, se denomina una derivada parcial. La derivada parcial de y respecto a t se describe $\partial y/\partial x$. Así tenemos

$$S = \tan(\theta) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Por lo tanto,

$$F_y = F_T(S_2 - S_1) = F_T \Delta S$$

donde S_2 y S_1 son las pendientes de ambos extremos del segmento de cuerda y ΔS la variación de la pendiente. Haciendo que esta fuerza neta sea igual a la masa $\mu\,\Delta x$ multiplicada por la aceleración $\partial^2 y/\partial t^2$, se tiene

$$F_T \Delta S = m\,a = m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu\,\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{(I.2.6)}$$

o bien

$$F_T \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{I.2.7}$$

En el limite $\Delta x \to 0$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Así pues, la ecuación I.2.7 se reduce a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{I.2.8a}$$

La ecuación I.2.8a es la ecuación de onda para una cuerda tensa.

La Ecuación de Onda

Ahora demostraremos que la ecuación de onda es satisfecha por cualquier función de $x - \nu t$. Hagamos $\alpha = x - \nu t$ y consideremos cualquier función de onda

$$y = y(x - \nu t) = y(\alpha)$$

La derivada de y respecto α la denominaremos y'. Entonces, por la regla de la derivación en cadena, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Dado que $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial (x-\nu t)}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial (x-\nu t)}{\partial t} = -\nu$

Se obtiene $\frac{\partial y}{\partial x} = y'$ y $\frac{\partial y}{\partial t} = -\nu y'$

La Ecuación de Onda

Tomando segundas derivadas, tenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} y' = \frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y''\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y''$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(-\nu\, y') = -\nu\frac{\partial y'}{\partial t} = -\nu\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = +\nu^2 y''$$

Así pues,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{(I.2.8b)}$$

Comparando las ecuaciones I.2.8a y I.2.8b vemos que la velocidad de propagación de la onda es $1/\nu^2 = \mu/F_T$ despejando, $\nu = \sqrt{F_T/\mu}$, que es la ecuación I.2.1.

Ejercicio: Demostrar que la ecuación de onda satisface la función $x + \nu\, t$.

Hagamos $\alpha = x + \nu\, t$ y consideremos cualquier función de onda

$$y = y(x + \nu t) = y(\alpha)$$

La derivada de y respecto α la denominaremos y'. Entonces, por la regla de la derivación en cadena, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Dado que $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial (x+\nu t)}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial (x+\nu t)}{\partial t} = \nu$

Se obtiene $\frac{\partial y}{\partial x} = y'$ y $\frac{\partial y}{\partial t} = \nu y'$

La Ecuación de Onda

Tomando segundas derivadas, tenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} y' = \frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y''\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y''$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nu\, y') = \nu\frac{\partial y'}{\partial t} = \nu\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \nu^2 y''$$

Así pues,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{(I.2.8b)}$$

Comparando una ves mas las ecuaciones I.2.8a y I.2.8b vemos que la velocidad de propagación de la onda es $1/\nu^2 = \mu/F_T$ despejando, $\nu = \sqrt{F_T/\mu}$, que es la ecuación I.2.1.

Ejemplo: Función de onda armónica

En el apartado siguiente se define las ondas armónicas mediante la función de onda $y(x,t) = A\,\text{sen}(\kappa x - \omega t)$, en donde $\nu = \omega/\kappa$.
Demostrar, calculando explícitamente las derivadas, que la función $y(x,t)$ $= A\,\text{sen}(\kappa x - \omega t)$ satisface la ecuación I.2.8b

Planteamiento del problema:

1.- Calcular la primera y segunda derivada de y respecto a x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}[A\,\text{sen}(\kappa x - \omega t)] \\
&= A\cos(\kappa x - \omega t)\frac{\partial(\kappa x - \omega t)}{\partial x} \\
&= \kappa\, A\cos(\kappa x - \omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\kappa\, A \cos(\kappa x - \omega t)] \\
&= -\kappa\, A \,\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)\frac{\partial(\kappa x - \omega t)}{\partial x} \\
&= -\kappa^2 A \,\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)
\end{aligned}$$

2.- De igual modo, las dos derivadas parciales respecto al tiempo, t, son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[A \,\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)] \\
&= A \cos(\kappa x - \omega t)\frac{\partial(\kappa x - \omega t)}{\partial t} \\
&= -\omega\, A \cos(\kappa x - \omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}[-\omega A \cos(\kappa x - \omega t)] \\
&= \omega\, A \,\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)\frac{\partial(\kappa x - \omega t)}{\partial t} \\
&= -\omega^2 A \,\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)
\end{aligned}$$

La Ecuación de Onda

3.- Sustituyendo estos resultados en la ecuación I.2.8b se obtiene:

$$-\kappa^2 A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) = \frac{1}{\nu 2}[-\omega^2 A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t)]$$

o bien

$$A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) = (\omega^2/\kappa^2)/\nu^2 A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t)$$

4.- Sustituyendo κ utilizando $\nu = \omega/\kappa$ se obtiene:

$$A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) = \nu^2/\nu^2 A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) = A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t)$$

La Ecuación de Onda

Observación: Hemos demostrado que la función $y = A\,\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)$ es una solución a la ecuación de onda si $\nu = \omega/\kappa$.

Ejercicio: Demostrar que cualquier función $y = A\,\mathrm{sen}(\kappa x + \omega t)$ es también una solución a la ecuación de onda si $\nu = \omega/\kappa$.

Ejercicio: Demostrar que cualquier función $y = A\,\mathrm{sen}(\kappa x)\cos(\omega t)$ es también una solución a la ecuación de onda si $\nu = \omega/\kappa$.

Utilizando las leyes de Newton puede deducirse también una ecuación de onda para las ondas sonoras. En una dimensión esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu_s^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

donde s es el desplazamiento del medio en la dirección x y ν_s es la velocidad del sonido.