TEMA II.6

Variación de la Presión con la Elevación

Dr. Juan Pablo Torres-Papaqui

Departamento de Astronomía
Universidad de Guanajuato
DA-UG (México)

papaqui@astro.ugto.mx

División de Ciencias Naturales y Exactas,
Campus Guanajuato, Sede Noria Alta

Otra definición de Presión

Presión

En todo punto de un fluido estático existe cierta intensidad de presión. De manera específica ésta, que por lo general se llama simplemente presión, se define como sigue:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

donde F es la fuerza normal que actúa sobre el área A. La intensidad de presión es una cantidad escalar, es decir, tiene sólo magnitud y actúa por igual en todas direcciones.

Esto se demuestra con facilidad si consideramos el elemento de fluido, en forma de cuña, que está en equilibrio como se muestra en la Figura II.6.1. Las fuerzas que actúan sobre el elemento son las fuerzas de superficie y la fuerza del peso.

Otra definición de Presión

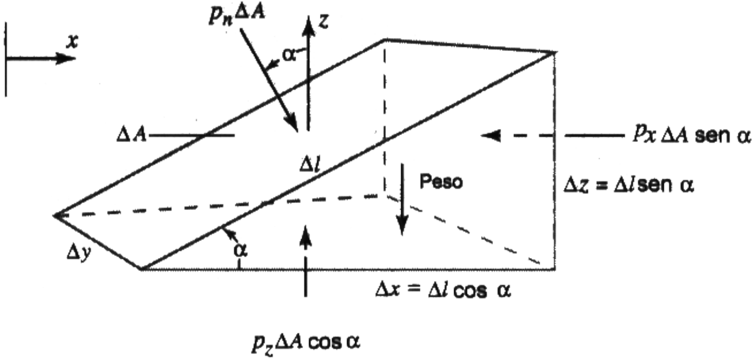

Figura II.6.1: Fuerzas de presión sobre un elemento fluido en equilibrio

Otra definición de Presión

Si escribimos la ecuación de equilibrio para la dirección x, obtenemos

$$(p_n \Delta y \Delta l) sen(\alpha) - p_x(\Delta y \Delta l \, sen(\alpha)) = 0$$

o bien $p_n = p_x$.

Para la dirección z, obtenemos

$$-(p_n \Delta y \Delta l) cos(\alpha) + p_z(\Delta y \Delta l \, cos(\alpha)) - \frac{1}{2}\gamma \Delta l \, cos(\alpha) \Delta l \, sen(\alpha) \Delta y = 0$$

Ahora, cuando dividimos esta ecuación entre el producto $\Delta l \Delta y \, cos(\alpha)$ y encogemos el elemento a un punto ($\Delta l \rightarrow 0$), desaparece el último término.

Otra definición de Presión

Por tanto, tenemos $p_n = p_z$.

Combinando las ecuaciones deducidas, finalmente llegamos al resultado

$$p_n = p_x = p_z$$

Como el ángulo es arbitrario y p_n es independiente de α, concluimos que la presión en un punto de un fluido estático actúa con la misma magnitud en todas direcciones:

$$p_n = p_x = p_y = p_z$$

Transmisión de Presión

En un sistema cerrado, un cambio de presión producido en un punto del sistema se transmite a todo el sistema.

El principio se conoce como ley de Pascal, en honor a Blaise Pascal, científico francés que fue el primero en expresarlo en 1653.

Este fenómeno de transmisión de presión, junto con la facilidad con la que los fluidos pueden moverse, ha llevado a la creación generalizada de controles hidráulicos para operar equipos diversos, por ejemplo, superficies de control en aviones, maquinaria pesada para movimiento de tierra, y prensas hidráulicas.

La Figura II.6.2 es una ilustración de la aplicación de este principio en la forma de un montacargas hidráulico que se emplea en talleres de servicio para automóviles.

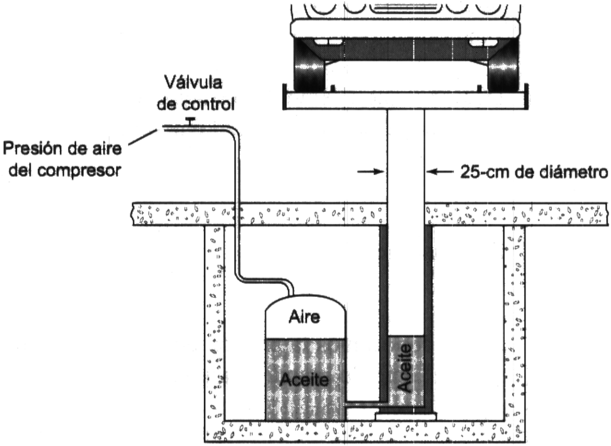

Figura II.6.2: Montacargas hidráulico

Transmisión de Presión

Aquí, la presión de aire de un compresor establece la presión del sistema de aceite, que a su vez actúa contra el émbolo del elevador.

Se puede observar que si una presión de 600 kN/m^2, por ejemplo, actúa sobre el émbolo de 25 cm de diámetro, entonces una fuerza igual a pA, o sea 29.5 kN, se ejercerá sobre el émbolo.

Para manejar cargas mayores o menores sólo es necesario aumentar o disminuir la presión.

Ejemplo: Un gato hidráulico tiene las dimensiones que se muestran en al Figura II.6.3. Si se ejerce una fuerza F de 100 N sobre la manivela del gato, ¿qué carga, F_2, puede sostener el gato? Desprecie el peso del elevador.

Solución: La fuerza F_1 ejercida sobre el pequeño émbolo se obtiene al tomar momentos respecto de C. Por lo tanto

$$(0.33\,m)(100\,N) - (0.03\,m)F_1 = 0$$

$$F_1 = \frac{(0.33\,m)(100\,N)}{0.03\,m} = 1100\,N$$

Transmisión de Presión

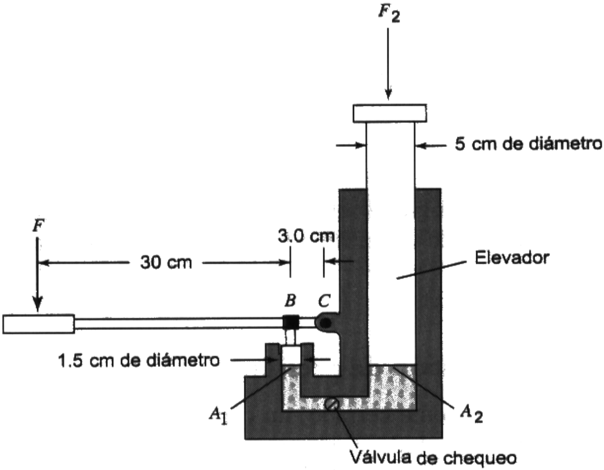

Figura II.6.3: Gato hidráulico

Debido a que le émbolo pequeño se encuentra en equilibrio, esta fuerza es igual a la fuerza de presión sobre el émbolo, o sea $p_1 A_1 = 1100\ N$.

En consecuencia,

$$p_1 = \frac{1100\,N}{A_1} = \frac{1100\,N}{\pi\,d^2/4} = 6.22 \times 10^6\ N/m^2$$

Ahora conocemos la presión del líquido. Por lo tanto, podemos despejar la fuerza sobre el émbolo grande. Como $p_1 = p_2$, $F_2 = p_1 A_2$, donde A_2 es el área del émbolo grande. Por último,

$$F_2 = 6.22 \times 10^6\,\frac{N}{m^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0.05\,m)^2 = 12.22\,kN$$

Ecuación Diferencial Básica

Para un fluido estático, la presión varía sólo con la elevación dentro del fluido. Esto se puede demostrar si se aisla un elemento cilíndrico de fluido y se le aplica la ecuación de equilibrio.

Considere el elemento que se ilustra en la Figura II.6.4. Aquí, se encuentra orientado de modo que su eje longitudinal es paralelo a una dirección arbitraria l.

El elemento mide Δl de largo, ΔA es el área de sección transversal, y está inclinado a una ángulo α con respecto a la horizontal. La ecuación de equilibrio para la dirección l, considerando las fuerzas de presión y la fuerza gravitacional que actúa sobre el elemento en esta dirección, es

$$\sum F_l = 0$$

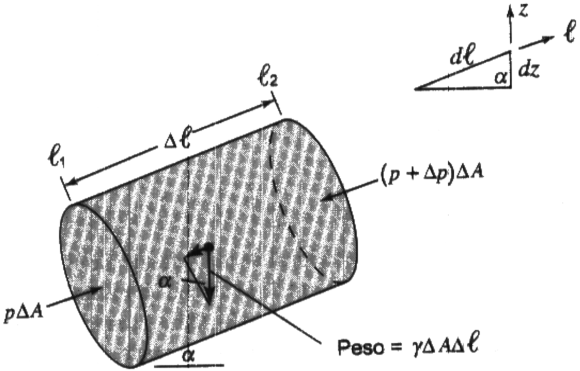

Figura II.6.4: Variación de presión con la elevación

Ecuación Diferencial Básica

$$p\Delta A - (p + \Delta p)\Delta A - \gamma \Delta A \Delta l\, sen(\alpha) = 0$$

Al simplificar y dividir entre el volumen del elemento, $\Delta l \Delta A$, esto se reduce a

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = -\gamma\, sen(\alpha)$$

Sin embargo, si hacemos que la longitud del elemento se aproxime a cero, entonces en el límite $\Delta p/\Delta l = dp/dl$. También se observa que $sen(\alpha) = dz/dl$. Por lo tanto

$$\frac{dp}{dl} = -\gamma \frac{dz}{dl} \tag{II.6.1}$$

Esto se puede escribir también como

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \tag{II.6.2}$$

que es la ecuación básica para variación de presión hidrostática con la elevación.

Ecuación Diferencial Básica

Esta ecuación expresa que, para fluidos estáticos, un cambio de presión en la dirección l, dp/dl, ocurre sólo cuando hay un cambio de elevación en la dirección l, dp/dl.

En otras palabras, si consideramos una trayectoria que pasa por el fluido y se encuentra en un plano horizontal, la presión en todos puntos a lo largo de esta trayectoria es constante.

Por otra parte, el cambio máximo posible ocurre en presión hidrostática a lo largo de una trayectoria vertical que pasa por el fluido.

Variación de Presión para un Fluido de Densidad Uniforme

Las ecuaciones II.6.1 y II.6.2 son por completo generales en el sentido de que describen la rapidez de cambio de presión para todos los fluidos en equilibrio estático.

Sin embargo, una buena simplificación resulta en aplicaciones prácticas de las ecuaciones si es posible suponer que la densidad del fluido, y por lo tanto el peso específico, son uniformes en todo el fluido.

Entonces γ es una constante, simplificando la integración de las ecuaciones, y la ecuación resultante es más sencilla si γ fuera una función de z. Con peso específico constante, la siguiente ecuación resulta de la integración de la ecuación II.6.2:

$$p + \gamma z = \mathit{constante} \tag{II.6.3}$$

Variación de Presión para un Fluido de Densidad Uniforme

Esta suma de presión y γz se conoce como la *presión piezométrica*, p_z. Al dividir la ecuación II.6.3 entre γ resulta

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = constante \qquad \text{(II.6.4)}$$

La suma de los términos p/γ y z en el lado izquierdo de la ecuación II.6.4 se llama *carga piezométrica*. Como se puede observar de la ecuación, ésta es una constante en todo fluido estático incompresible.

Por lo tanto, podemos relacionar la presión y elevación en un punto con la presión y elevación en otro punto del fluido en la forma siguiente:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \qquad \text{(II.6.5)}$$

o bien,

$$\Delta p = -\gamma \Delta z \qquad \text{(II.6.6)}$$

Variación de Presión para un Fluido de Densidad Uniforme

Hay que observar, sin embargo que las ecuaciones II.6.3 a la II.6.6 son aplicables sólo en fluidos con pesos específicos constantes. En otras palabras, las ecuaciones II.6.5 y II.6.6 se pueden aplicar entre dos puntos de un fluido dado, pero no en la superficie de contacto entre dos fluidos que tiene diferentes pesos específicos.

Ejemplo: Cierta cantidad de aceite con una gravedad específica de 0.90 forma una capa de 0.90 m de profundidad en un tanque abierto que de otra manera está lleno de agua. La profundidad total del agua y del aceite es de 3 m ¿Cuál es la presión manométrica en el fondo del tanque? (ver Figura II.6.5)

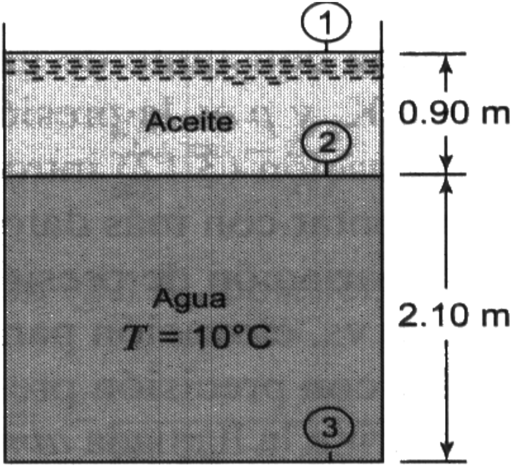

Figura II.6.5: Capas de diferentes pesos específicos, agua y aceite

Solución: Primero determinamos la presión en la superficie de contacto entre el aceite y el agua, y luego calculamos la presión en el fondo

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

donde p_1 es la presión en la superficie libre de aceite, z_1 es la elevación de la superficie libre de aceite, p_2 es la presión en la superficie de contacto entre aceite y agua, y z_2 es la elevación en la superficie de contacto entre aceite y agua. En este caso, $p_1 = 0$, $\gamma = (0.80)(9810\ N/m^3)$, $z_1 = 3\ m$, y $z_2 = 2.10\ m$. Por tanto

$$p_2 = (0.90\, m)(0.80)(9810\, N/m^3) = 7.06\, kPa$$

Ahora obtenemos p_3 a partir de $\frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$, donde p_2 ya se ha calculado y $gamma = 9810\ N/m^3$.

$$p_3 = 9810 \left(\frac{7060}{9810} + 2.10 \right) = 27.70\, kPa$$

Variación de Presión para un Fluidos Compresibles

Cuando el peso específico varía en forma considerable en todo el fluido, este debe expresarse de manera tal que la ecuación II.6.2 se pueda integrar. Para el caso de un gas ideal, esto se logra pro medio de la ecuación de estado, que relaciona la densidad del gas con al presión y la temperatura:

$$\frac{p}{\rho} = R\,T$$

o bien,

$$\rho = \frac{p}{R\,T}$$

Esto se puede expresar como sigue, cuando ambos lados de la ecuación anterior se multiplican por g:

$$\gamma = \frac{p\,g}{R\,T} \tag{II.6.7}$$

donde R es la constante de gases, 287 $J/kg \cdot K$, para aire seco, T es la temperatura absoluta en K, y p es la presión absoluta en Pa.

Variación de Presión para un Fluidos Compresibles

La ecuación II.6.7 introduce otra variable, la temperatura, de modo que se hace necesario contar con más datos relacionados con la temperatura y al elevación.

Si nos interesa la variación de presión en la atmósfera, y si se dispone de la información de temperatura contra elevación para una región local en un tiempo dado, entonces es posible calcular con precisión presión contra elevación. La Figura II.6.6 muestra la *atmósfera estándar en Estados Unidos*, compilada pro el U.S. National Weather Service.

A nivel del mar, la presión atmósferica estándar es 101.3 kPa y la temperatura es 296 K. La atmósfera está dividida en dos capas, la *troposfera* y la *estratosfera*.

La troposfera, definida como la capa entre le nivel del mar y 13.6 km y la estratosfera es la parte superior de la troposfera.

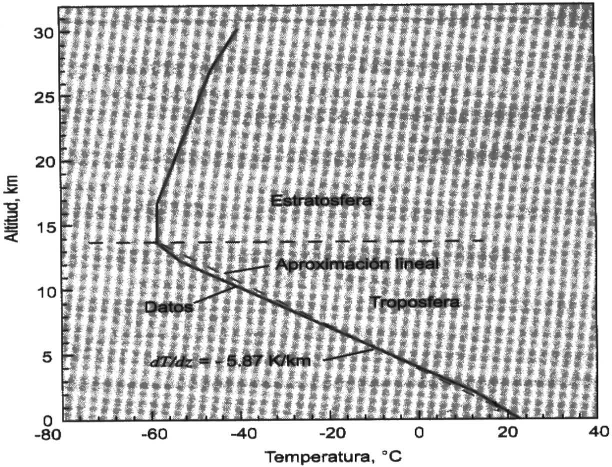

Figura II.6.6: Variación de la temperatura con la altitud para la atmósfera estándar en Estados Unidos en julio

Variación de Presión en la Troposfera

La temperatura T está dada por

$$T = T_o - \alpha(z - z_o)$$

En esta ecuación T_o es la temperatura a un nivel de referencia donde la presión se conoce y α es el gradiente de temperatura. Sin empleamos el peso específico de un gas

$$\rho = \frac{P}{RT} \qquad \Rightarrow \gamma = \frac{P\rho}{RT}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Pg}{RT}$$

Variación de Presión en la Troposfera

Sustituyendo por T, obtenemos

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Pg}{R[T_o - \alpha(z - z_o)]}$$

Ahora debemos separar las variables e integrar para obtener

$$\frac{P}{P_o} = [\frac{T_o - \alpha(z - z_o)}{T_o}]^{g/\alpha R}$$

$$P = P_o[\frac{T_o - \alpha(z - z_o)}{T_o}]^{g/\alpha R}$$

Variación de Presión en la Troposfera

Ejemplo: A nivel del mar $P_o = 101.3\ kPa$ y $23\ ^oC$ ¿Cuál es la presión a una elevación de $2000\ m$, donde $P_o = 101.3\ N/m^2$, $T_o = 273 + 15 = 296\ K$, $\alpha = 5.87 \times 10^{-3}\ K/m$, z - $z_o = 2000\ m$ y $g/\alpha\, R = 5.823$?

$$P = 101.3 \left(\frac{(296\, K - 5.87 \times 10^{-3} K/m)(2000\, m)}{296\, K} \right)^{5.823}$$

$$= 80.0\, kPa$$

Variación de Presión en la Estratosfera

En la estratosfera se supone que la temperatura es constante

$$ln\, P = -\frac{zg}{RT} + C$$

En donde $z = z_o$, $P = P_o$ de modo que

$$\frac{P}{P_o} = e^{-(z-z_o)g/RT}$$

o bien

$$P = P_o e^{-(z-z_o)g/RT}$$

Variación de Presión en la Estratosfera

Ejemplo: Si la presión y temperatura son 15.9 kPa y -57.5 ^oC a una elevación de 13.72 km ¿Cuál es la presión a 16.77 km?

$$P = 9.82\, kPa$$