TEMA II.7

Lagrange y Euler

Dr. Juan Pablo Torres-Papaqui

Departamento de Astronomía
Universidad de Guanajuato
DA-UG (México)

papaqui@astro.ugto.mx

División de Ciencias Naturales y Exactas,
Campus Guanajuato, Sede Noria Alta

Lagrange y Euler

Descripción de Lagrange y de Euler de fluido en movimiento.

Hay dos formas para describir el movimiento de un fluido. Una es identificar una pequeña masa de fluido en un flujo, denominada partícula fluida, y describir el movimiento todo el tiempo. Este es el enfoque Lagrange. La trayectoria de una partícula de fluido esta dada por el vector $r(t)$ (ver Figura II.7.1) y se expresa en coordenadas cartesianas como

$$r(t) = x(t)\mathrm{i} + y(t)\mathrm{j} + z(t)\mathrm{k}$$

la velocidad del fluido se obtiene al derivar la ecuación anterior

$$V(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathrm{k}}$$

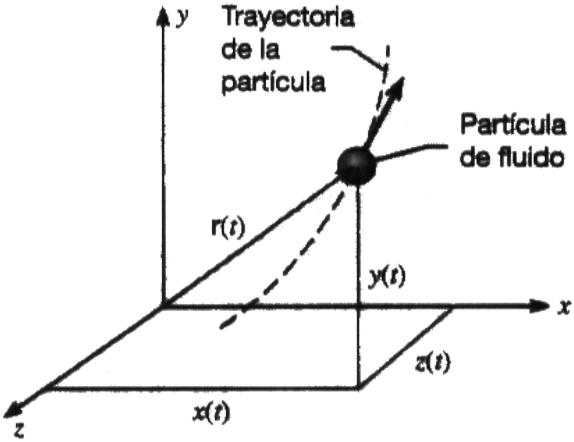

Figura II.7.1: Trayecoria y velocidad de una partícula de fluido

Lagrange y Euler

o bien

$$V(t) = u\hat{i} + \nu\hat{j} + \omega\hat{k}$$

donde u, ν, y ω son las velocidades componentes en sus respectivas direcciones de coordenadas. Esto representa solo una partícula.

Para obtener una descripción mas completa y general del movimiento del fluido en algún campo, se tendría que tener disponible las trayectorias de muchas partículas de fluido (ver Figura II.7.2a).

La otra forma para describir el movimiento del fluido es imaginar un arreglo de “ventanas” en el campo de flujo y tener la información de la velocidad de las partículas de fluido que pasan por cada ventana en cualquier instante (ver Figura II.7.2b).

Lagrange y Euler

Este es el enfoque de Euler, en este caso, la velocidad es una función de la posición de la ventana (x, y, y z) y el tiempo, de manera que:

$$u = f_1(x, y, z, t) \qquad \nu = f_2(x, y, z, t) \qquad \omega = f_3(x, y, z, t)$$

El nivel de detalle depende del numero de ventanas disponibles. En el limite habría un numero infinito de ventanas de tamaño infinitesimal, y la velocidad estaría disponible en cada punto en el campo.

Otra manera útil para expresar la velocidad es en términos de la posición junto con la línea de corriente y el tiempo. Esto esta dado como:

$$V = V(s, t)$$

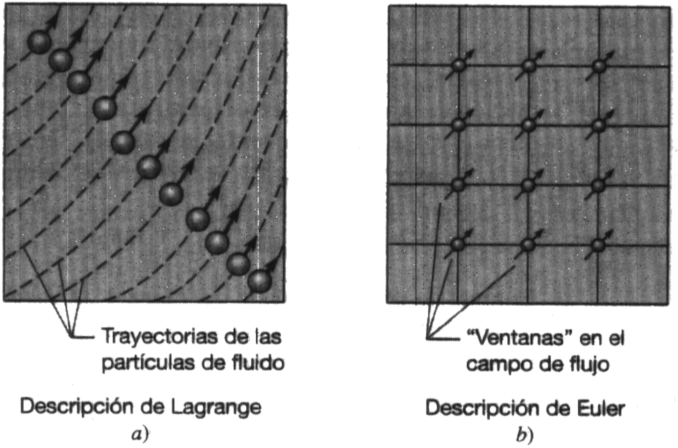

Figura II.7.2: Descripciones de Lagrange y Euler de un campo de flujo

Líneas de corriente y patrones de flujo.

Para visualizar el campo de flujo es deseable construir líneas que muestren la dirección del flujo. A esa construcción se le llama patrón de flujo y a las líneas se les conoce como líneas de corriente.

Se define a una línea de corriente como la línea que pasa por el campo de flujo de manera tal que el vector de velocidad local es tangente a cada punto a lo largo de ésta en ese instante.

En consecuencia, la tangente de la línea de corriente en cierto tiempo indica la dirección del vector de velocidad.

Lagrange y Euler

En la Figura II.7.3a se muestra un ejemplo de líneas de corriente del patrón de flujo para el agua que fluye por un orificio en el lado de una tanque.

Tres vectores de velocidad se han dibujado en tres diferentes ubicaciones: a, b, y c. Estos vectores han sido dibujados de acuerdo con la definición de línea de corriente.

Siempre que le flujo ocurra alrededor de un cuerpo, parte de él correrá por un lado y parte por el otro, como se ilustra en la Figura II.7.3b para el flujo que pasa por una sección de un ala de avión.

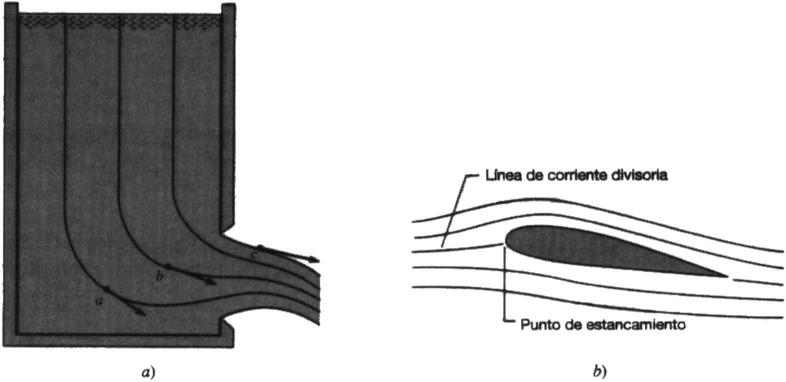

Figura II.7.3: Flujo drenado de un tanque por un orificio y que pasa sobre la sección de un ala

La línea de corriente que sigue la división del flujo (que al dividirse y pasar por la parte superior se junta de nuevo con la corriente de abajo) se le llama línea de corriente divisoria.

En el punto donde la línea antes mencionada interseca el cuerpo, la velocidad será cero; este es el punto de estancamiento.

Aceleración

Componente normal y tangencial

Mediante las componentes normal y tangencial, la velocidad de una partícula de fluido en una línea senda (ver Figura II.7.4) puede ser escrita como

$$V = V(s,t)_{e_t}$$

donde $V(s,t)$ es la velocidad de la partícula, que puede variar con la distancia a lo largo de la línea senda s, y el tiempo t. La dirección del vector velocidad esta dada por un vector unitario e_t. Usando la definición de aceleración

$$a = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{ds}\right) e_t + V\left(\frac{de_t}{dt}\right)$$

Aceleración

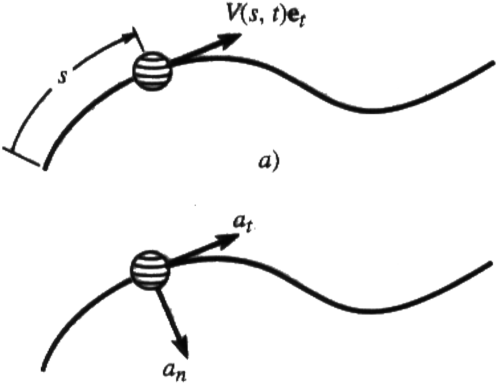

Figura II.7.4: Partículas de fluido moviéndose sobre una línea senda. a) velocidad. b) Aceleración

Aceleración

Para evaluar la derivada de la rapidez, usando la regla de la cadena para una función de dos variables

$$\frac{dV(s,t)}{dt} = (\frac{dV}{ds})(\frac{ds}{dt}) + \frac{dV}{dt}$$

En un tiempo dt, la partícula de fluido se mueve una distancia ds, de modo que la derivada ds/dt corresponde a la rapidez V de la partícula, y la ecuación anterior se convierte

$$\frac{dV}{dt} = V\left[\frac{\partial V}{\partial s}\right] + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Aceleración

La derivada del vector unitario de_t/dt es diferente de cero porque la dirección del vector unitario cambia con el tiempo

$$\frac{de_t}{dt} = \frac{V}{r} e_n$$

donde r es el radio local de curvatura de la línea y e_n es u vector unitario que es perpendicular a la línea senda y apunta hacia adentro, al centro de curvatura. Sustituyendo en la ecuación de aceleración tenemos

$$a = \left(V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) e_t + \left(\frac{V^2}{r} \right) e_n$$

el primer termino muestra que si la rapidez de una partícula de fluido esta cambiando, existe una componente de aceleración tangente a la línea senda.

Aceleración

El segundo termino muestra que una línea curva da lugar a una componente de aceleración normal a la línea, es decir, la aceleración centrípeta.

Componentes cartesianas

Mediante el enfoque de Euler, las componentes de la velocidad son funciones del espacio y el tiempo

$$V = u\hat{i} + \nu\hat{j} + \omega\hat{k}$$

donde $u = f_1(x, y, z, t)$, $\nu = f_2(x, y, z, t)$, y $\omega = f_3(x, y, z, t)$. La aceleración de una partícula de fluido en la dirección x esta dado por

$$a_x = \frac{du}{dt}$$

donde u es la componente x de la velocidad medida que seguimos a la partícula.

Aceleración

Usando la regla de la cadena para la derivación de una función multivariable, tenemos

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

En un tiempo dt, una partícula de fluido se mueve en la dirección x a una distancia $dx = u\,dt$ de modo que $u = dx/dt$, y de manera similar $\nu = dy/dt$, y $\omega = dz/dt$.

Así la componente de la aceleración a_x de la partícula esta dada por

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial y} + \omega\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Aceleración

del mismo modo para y y z

$$a_y = u\frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu\frac{\partial \nu}{\partial y} + \omega\frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial t}$$

$$a_z = u\frac{\partial \omega}{\partial x} + \nu\frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Ejemplo: Sea el campo de velocidad para un fluido esta dado por

$$V = 2x^2 t\hat{i} + 3xy^2\hat{j} + 2xz\hat{k}$$

Encuentre la aceleración en la dirección x en el punto (1,2,2) cuando $t = 1$.

Solución:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial y} + \omega\frac{\partial u}{\partial z}$$

Las componentes de la velocidad son $u = 2x^2 t$, $\nu = 3xy^2$, $\omega = 2xz$:

$$a_x = 2x^2 + (2x^2 t)(4xt) + (3x^2 y)(0) + (2xz)(0) = 2 + 8 = 10\, m/s^2$$

Aceleración convectiva y local

Una inspección de las ecuaciones de a_x, a_y, y a_z revela que algunos términos involucran derivadas con respecto al tiempo, es decir $\partial u/\partial t$. Estos términos se llaman aceleraciones locales.

Los términos de aceleración local se presentan solo cuando un campo de flujo es no permanente (inestable). En un flujo permanente (estable), la aceleración local es cero. Los términos restantes (es decir, $u(\partial u/\partial x)$, $\nu(\partial \nu/\partial x)$, etc) se denominan aceleraciones convectivas. Las aceleraciones convectivas se presentan cuando la velocidad es una función de posición en un campo de flujo. En flujos uniformes, la aceleración convectiva es cero.

Aceleración

Ejemplo: Una tobera esta diseñada de manera tal que la velocidad varía en función de la longitud x (ver Figura II.7.5), o sea

$$u = \frac{u_o}{1.0 - 0.5x/L}$$

donde la velocidad u_o es la de entrada y L es la longitud de la tobera. La velocidad de entrada es 10 m/s y la longitud de 0.5 m. La velocidad es uniforme a través de cada sección.

Encuentre la aceleración media a través de la tobera $(x/L = 0.5)$

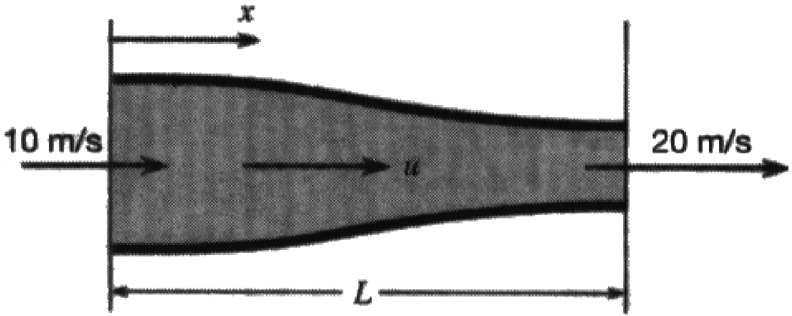

Figura II.7.5: Tobera

Aceleración

Solución: Es obvio que hay aceleración entra a 10 m/s y sale a 20 m/s. No hay aceleración local porque el flujo es estable, de manera que la aceleración es debida a aceleración convectiva:

$$a_x = u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u_o}{(1.0 - 0.5x/L)^2}(-\frac{0.5}{L}) = \frac{1}{L}\frac{0.5\, u_o}{(1.0 - 0.5x/L)^2}$$

$$u \cdot \frac{du}{dx} = 0.5\frac{u_o^2}{L}\frac{1}{(1.0 - 0.5x/L)^3}$$

Aceleración

Sustituyendo en $x/L = 0.5$, se obtiene

$$a_x = 1.185\frac{u_o^2}{L} = 1.185\frac{10^2}{0.5} = 237\, m/s^2$$

a_x resulto positiva, luego entonces esta tiene dirección positiva. Esto es razonable, ya que la velocidad aumenta en la dirección x positiva.