TEMA II.8

Ecuación Euler

Dr. Juan Pablo Torres-Papaqui

Departamento de Astronomía
Universidad de Guanajuato
DA-UG (México)

papaqui@astro.ugto.mx

División de Ciencias Naturales y Exactas,
Campus Guanajuato, Sede Noria Alta

Ecuación de Euler

De la dinámica se sabe que el movimiento de un cuerpo esta gobernado por la segunda ley de Newton, $F = ma$.

Las fuerzas se deben a la presión y la gravedad principalmente.

Considere el elemento de fluido cilíndrico situado entre dos líneas de corriente (ver Figura II.8.1a).

Se puede tomar este elemento como "cuerpo libre" en el cual la presencia del fluido circundante se remplaza por fuerzas de presión que actúan sobre el elemento.

Ecuación de Euler

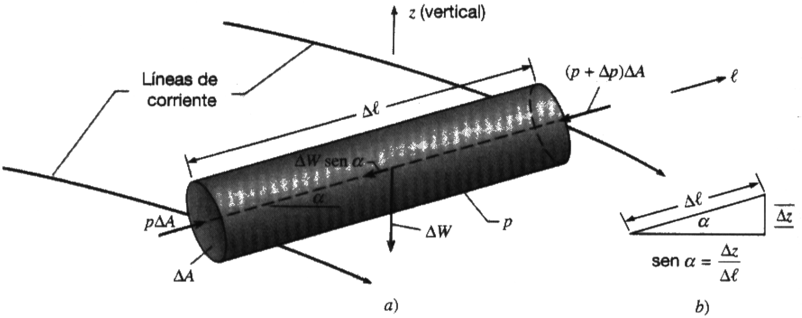

Figura II.8.1: Diagrama de "cuerpo libre" para un elemento de fluido con aceleración en la dirección *l*. a) Elemento de fluido. b) Relación trigonométrica

Ecuación de Euler

Aquí el elemento se acelera en al dirección l.

Observe que el eje de coordenadas z es verticalmente hacia arriba y que la presión varía a lo largo de la longitud del elemento.

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección l, tenemos

$$\sum F = ma; \qquad F_{presion} + F_{gravedad} = ma$$

la masa del elemento de fluido es $m = \rho \Delta A \Delta l$

Sustituyendo las fuerzas debido a la presión y a la gravedad (peso) en la ecuación anterior tenemos

$$P\Delta A - (P + \Delta P)\Delta A - \Delta\omega sen(\alpha) = \rho \Delta A \Delta l a$$

Advierta que la fuerza de presión que actúa sobre los lados del elemento cilíndrico no contribuye con la fuerza de presión en la dirección l.

Sin embargo, $\Delta\omega = \gamma \Delta l \Delta A$ de manera que

$$-\frac{\Delta P}{\Delta l} - \gamma sen(\alpha) = \rho a$$

La presión es una función de la posición como del tiempo.

Ecuación de Euler

Tomando el limite de $\Delta P/\Delta l$, en un tiempo dado conforme Δl se aproxima a cero se obtiene la derivada parcial

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta l}|_t = \frac{\partial P}{\partial l}$$

La Figura II.8.1b también muestra que $sen(\alpha) = \Delta z/\Delta l$.

Tomando el limite conforme Δl se aproxima a cero en un tiempo dado se obtiene

$$sen(\alpha) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}$$

Ecuación de Euler

Así, la forma limitante de la ecuación, cuando $\Delta l \rightarrow 0$ es

$$-\frac{\partial P}{\partial l} - \gamma \frac{\partial z}{\partial l} = \rho a$$

o tomando γ como una constante

$$-\frac{\partial}{\partial l}(P + \gamma z) = \rho a$$

Esta es la ecuación de Euler

Ecuación de Euler

Cuando la aceleración es cero $\partial(P + \gamma z)/\partial l = 0$, que corresponde a la ecuación hidrostática $P + \gamma z = constante$.

Suponga que el tanque con liquido abierto (ver Figura II.8.2), se acelera hacia la derecha, con dirección x positiva, a razón de a_x.

Con la ecuación de Euler se realiza un análisis cuantitativo adicional de la aceleración del tanque con liquido.

Considere primero la aplicación de la ecuación a lo largo de la superficie del liquido $A'B'$, aquí la presión es constante $P = P_{atm}$.

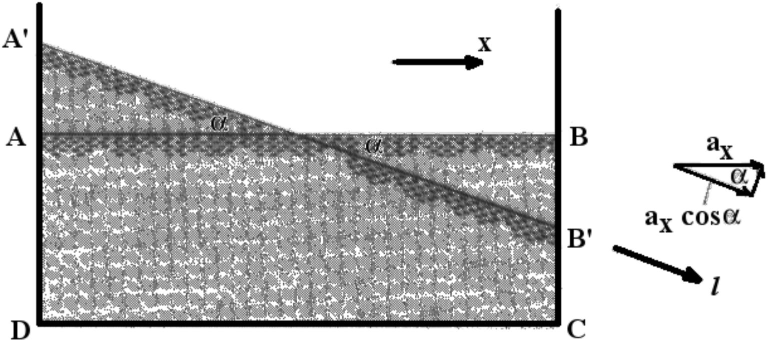

Figura II.8.2: Aceleración uniforme de un tanque con líquido

Ecuación de Euler

En consecuencia, $\partial/\partial l = 0$. La aceleración a lo largo de $A'B'$ esta dada por $a = a_x cos(\alpha)$. De aquí

$$\frac{d}{dl}(\gamma z) = -P a_x cos(\alpha)$$

donde la derivada total se utiliza porque las variables no cambian con el tiempo. El peso específico es constante, por lo tanto

$$\frac{dz}{dl} = -\frac{a_x cos(\alpha)}{\rho}$$

pero $dz/dl = -sen(\alpha)$. Así se obtiene

$$sen(\alpha) = \frac{a_x cos(\alpha)}{g} \qquad \text{o} \qquad tg(\alpha) = \frac{a_x}{g}$$

Ejemplo: El tanque de un camión cisterna esta completamente lleno con gasolina, que tiene una $\gamma = 6.60\ kN/m^3$ (ver Figura II.8.3)

a) Si el tanque sobre el camión mide de largo 6.1 m y la presión en el extremo trasero superior de este tanque es la atmosférica ¿cuál es la presión en la parte delantera superior cuando el camión des-acelera a razón de 3.05 m/s^2?

b) Si el tanque mide de alto 1.83 m ¿cuál es la máxima presión en el tanque?

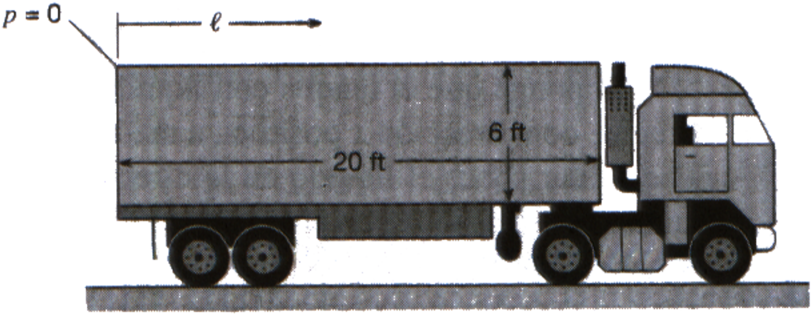

Figura II.8.3: Tanque sobre camión cisterna

Ecuación de Euler

Solución: En la parte superior del tanque, z es constante y la presión no varía con el tiempo durante esta fase desaceleración

$$\frac{dp}{dl} = -\rho a$$

Integrando, se obtiene $P =$ -$\rho\, l\, a + C$

Cuando $l = 0$, $P = 0$; de aquí que $C = 0$, y $P = -\rho\, a\, l$, ahora sustituyendo -3.05 m/s^2 para a_l, 6.1 m para l, y 672 kg/m^3 para ρ, que es igual a γ/ρ, se obtiene

$$P = -(673\, kg/m^3)(-3.05\, m/s^2)(6.1\, m) = 12500\, N/m^2$$

La máxima presión en el tanque ocurrirá en el extremo delantero del fondo. Como la variación de presión es hidrostática en la dirección vertical, se obtiene $P + \gamma z = constante$, o

$$P_{fondo} + \gamma z_{fondo} = P_{superior} + \gamma z_{superior}$$

Al despejar

$$P_{max} = P_{fondo} = 12500\, N/m^2 + (6.6\, kN/m^3)(1.83\, m)$$

$$= 24.6 kPa$$